Systèmes dynamiques M1

Université de Picardie Jules Verne

2021

Systèmes dynamiques

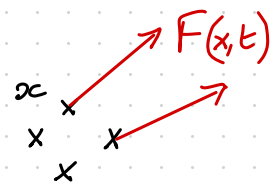
I Introduction

$d \geq 1$ entier, $U \subset \mathbb{R}^d$ ouvert, $I \subset \mathbb{R}$ ouvert

$F : U \times I \to \mathbb{R}^d$: champ de vecteurs

$(x, t) \mapsto F(x,t)$

pos. temps

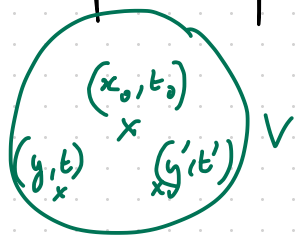


$\rightsquigarrow$ Équation différentielle (ordinaire) (EDO) : $\dfrac{dx}{dt} = F(x,t)$ $(*)$

U : espace des phases, $(*)$: loi d'évolution de x

Une solution de $(*)$ est une fonction dérivable $x : J \to U$ avec $J \subset I$ intervalle ouvert, t.q. $x'(t) = F(x(t), t)$, $\forall t \in J$

(la solution est maximale si elle n'admet pas de prolongement strict qui soit encore solution)



Théorème. (Cauchy-Lipschitz)

Si $F : U \times I \to \mathbb{R}^d$ est C^r, $r \geq 0$, et localement Lipschitz par rapport à la première variable, $\left(\forall (x_0, t_0) \in U \times I, \exists V \text{ vois.}, C > 0 \text{ t.q. } \forall (y,t), (y',t') \in V, \right.$
$\left. \| F(y,t) - F(y',t') \| \leq C \| y - y' \| \right)$

alors pour toute condition initiale $(x_0, t_0) \in U \times I$,
$\exists !$ solution maximale $x : J \to U$, $J \subset \mathbb{R}$ int ouvert contenant t_0 t.q. $x(t_0) = x_0$

De plus, $\forall t_1 \in J$, $x(t_1)$ dépend de façon C^r de (x_0, t_0)

Exemple pendule forcé périodiquement $\rightsquigarrow$ $\ddot{\theta} + \sin\theta = \varepsilon \sin(\omega t)$

$(\varepsilon, \omega \in \mathbb{R})$

$x = (x_1, x_2)$ $\quad (= (\theta, \dot{\theta}))$

$$\rightsquigarrow \frac{dx}{dt} = (\underbrace{x_2}_{\dot{\theta}}, \underbrace{\varepsilon \sin(\omega t) - \sin(x_1)}_{\ddot{\theta}}) =: F(x, t) \text{ avec}$$

espace des phases $U = \mathbb{R}^2$ ici

En fait, $F(x_1 + 2k\pi, x_2, t) = F(x, t)$ pour tous $(x_1, x_2) \in U$ et $t \in \mathbb{R}$

donc on peut voir F comme une fonction $\tilde{F}$ $\tilde{U} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

avec $\tilde{U} = \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}} = \mathbb{R}/_{\sim}$ où $x_1 \sim x_1 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\left(\tilde{U} = \left\{ \left[(x_1, x_2) \right] \right\} \text{ où } \left[(x_1 + 2k\pi, x_2) \right] = \left[(x_1, x_2) \right] \right)$$

De plus, si $t \longmapsto x(t)$ est solution pour les conditions initiales $x(t_0) = x_0$,

alors $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, $x_k : t \longmapsto x(t) + 2k\pi$ satisfait

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_k}{dt} &= \frac{dx}{dt} \\ F(x_k, t) &= F(x, t) \end{aligned}\right\} \text{ d'où } \begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= F(x_k(t), t) \\ x_k(0) &= x_0 + 2k\pi \end{aligned}$$

En particulier on peut remplacer l'espace des phases par $\tilde{U}$ et l'équation différentielle devient $\dfrac{d[x]}{dt} = \tilde{F}([x], t)$, $[x] \in \tilde{U}$

Flots autonomes

Soit

$$(*) \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(x,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

EDO satisfaisant les conclusions de Cauchy-Lipschitz

U = espace des phases

On fait l'hypothèse que les solutions maximales de $(*)$ sont définies sur $\mathbb{R}$ (car on va s'intéresser aux propriétés asymptotiques)

Déf (flot) le flot de $(*)$ est une application $\Phi : (U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to U$

tq $t \mapsto \Phi_{t_0}^{t}(x_0) := \Phi(x_0, t_0, t)$ soit solution de $(*)$

Alors, chaque application $\Phi_{t_0}^{t} : U \to U$ est un homéomorphisme (et même un difféomorphisme aussi régulier que F), et $\forall\, t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$,

$$(\star) \qquad \Phi_{t_0}^{t_2} = \Phi_{t_1}^{t_2} \circ \Phi_{t_0}^{t_1}$$

(l'évolution de t_0 à t_2 s'obtient en composant les évolutions de t_0 à t_1 et t_1 à t_2)

En systèmes dynamiques, on fait une hypothèse de stationnarité

on suppose que Φ_s^{s+t} ne dépend pas du temps $s \in \mathbb{R}$

Dans le cadre d'une EDO cela revient à supposer l'E.D.O. autonome

c'est-à-dire que $F = F(x)$ dépend seulement de x et pas de t

Dans ce cas, en posant $\Phi^t = \Phi_0^t$, $(\star)$ devient

$$\Phi^{s+t} = \Phi^t \circ \Phi^s, \qquad \forall s, t \in \mathbb{R}$$

$$(\Phi^0 = \mathrm{id})$$

Exemple. en mécanique, on se donne un hamiltonien (énergie mécanique)

$$H \quad U \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad U \subset \mathbb{R}^2 \text{ ouvert}$$
$$(q,p) \longmapsto H(q,p)$$

On suppose H de classe C^2, et on considère le champ de vecteurs

$$F \quad x = (q,p) \longmapsto \left(\frac{\partial H}{\partial p}(x) , -\frac{\partial H}{\partial q}(x) \right)$$

On s'intéresse à l'E.D.O $\dot{x} = F(x)$, $x(0) = (q_0, p_0)$,

et on note $\Phi^t : (q_0, p_0) \longmapsto (q(t), p(t))$ le flot associé

$$\rightsquigarrow (\bullet) \begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

L'énergie $E(t) = H(q(t), p(t))$ est constante le long de la trajectoire.

$$\left(\frac{d}{dt} H(q(t), p(t)) = \underbrace{\dot{q}(t)}_{= \frac{\partial H}{\partial p}(q(t), p(t))} \frac{\partial H}{\partial q}(q(t), p(t)) + \underbrace{\dot{p}(t)}_{= -\frac{\partial H}{\partial q}(q(t), p(t))} \frac{\partial H}{\partial p}(q(t), p(t)) = 0 \right)$$

& le flot Φ^t est conservatif (préserve le volume $dq\,dp$)

En effet, $(\bullet) \Rightarrow$

$$d\dot{q} = \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} dq + \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} dp$$

$$d\dot{p} = -\frac{\partial^2 H}{\partial q^2} dq - \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} dp$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(d(p(t)) \wedge d(q(t)) \right) = d\dot{p} \wedge dq + dp \wedge d\dot{q}$$

$$= -\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q^2} dq + \cancel{\frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} dp}\right) \wedge dq + dp \wedge \left(\cancel{\frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} dq} + \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} dp\right)$$

$$= 0$$

donc Φ^t préserve $dp \wedge dq$ et donc l'élément de volume $dq\,dp$

Bref historique du développement des systèmes dynamiques

Des équa. diff. aux systèmes dynamiques :

XVIIe s. : Newton & Leibniz inventent le calcul diff.

XVIIIe s. : Bernoulli & Euler : on modélise et on résout

XIXe s. : Cauchy, Lipschitz, Peano, Picard :

résultats théoriques sur l'existence et l'unicité locale de solutions ...

Mécanique céleste :

XVIe s. : Kepler : trajectoires elliptiques (empirique)

XVIIe s.

Newton : $\sum \vec{f} = m\vec{a}$ / gravitation universelle, mouvement

XIXe s. : Poincaré : mémoire du roi Oscar II de Suède (1880)

Pas de formule au problème des 3 corps.

Équation d'Airy : $\ddot{y} = xy$ ⇝ pas de fonction usuelle solution

⇝ Formule des solutions d'une équa. diff. finalement pas importante

En se fondant sur l'existence et l'unicité des solutions en temps infini,

Poincaré propose d'étudier qualitativement ces solutions : (sans forcément avoir de formule exacte)

- existence de comportements asymptotiques simples ou complexes
- dépendance du mouvement par rapport aux conditions initiales
- récurrence (ou non) d'un état initial
- propriétés statistiques des évolutions
- imprévisibilité potentielle en cas de petites erreurs de mesure, de calcul ...

De plus, problème des 3 corps beaucoup trop compliqué :

Poincaré propose d'étudier des modèles plus simples pour avoir une idée des phénomènes importants (flots géodésiques, homéo. du cercle ...)

Notions générales et exemples

En systèmes dynamiques, on définit la notion de flot plus généralement comme

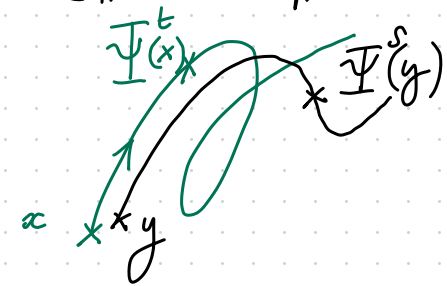
Déf.. (flot)

Une famille d'applications $(\Phi^t : X \to X)_{t \geq 0}$ sur un espace X est appelée un semi-flot si $\Phi^0 = \mathrm{id}$, et

$$\Phi^{t+s} = \Phi^t \circ \Phi^s, \quad \forall\, t, s \geq 0$$

De même, une famille d'applications $(\Psi^t : X \to X)_{t \in \mathbb{R}}$ est appelée un flot si $\Psi^0 = id$, et

$$\Psi^{t+s} = \Psi^t \circ \Psi^s, \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$$



On parle de système dynamique en temps continu

Notons que pour un flot $(\Psi^t)_{t \in \mathbb{R}}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, Ψ^t est inversible, d'inverse Ψ^{-t} $\left(\Psi^t \circ \Psi^{-t} = \Psi^{-t} \circ \Psi^t = \Psi^{t-t} = \Psi^0 = id\right)$

De manière parallèle, on peut définir un système dynamique à temps discret.

Déf. un système dynamique à temps discret est la donnée d'un couple (X, f) où X est un ensemble, et $f : X \to X$ une application

$\rightsquigarrow$ on définit récursivement $f^{n+1} = f \circ f^n$, $\forall n \geq 0$ $\quad (f^0 = id)$

Lorsque f est inversible, on définit $f^{-n} = (f^{-1})^n$ pour tout $n \geq 0$

Exemples. ① applications logistiques

$$\forall \mu \in [0,4], \quad f_\mu : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \mu x (1-x) \end{array} \qquad \text{(application logistique)}$$

Introduite par Robert May en 1976 pour décrire l'évolution d'une population.

Étant donné $x_0 \in [0,1]$ $\rightsquigarrow$ $x_n = f_\mu^n(x_0)$, $n \geq 0$ décrit le rapport de la population d'une spèce sur la population maximale de cette spèce.

μ : paramètre de "reproduction"

$\rightsquigarrow$ si $\mu > 1$ et $x \in [0,1]$ est petit, $f_\mu(x) \approx \mu x$, $f_\mu^{\circ 2}(x) \approx \mu^2 x$ ...

croît exponentiellement

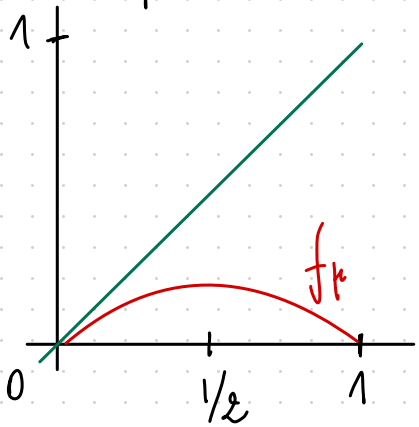
Mais lorsque la population commence à devenir très grande, dans un environnement fini, les ressources vont finir par manquer $\rightsquigarrow$ la croissance ralentit

[P F Verhulst a proposé en 1845 un modèle où le taux de croissance décroît linéairement avec la population. $y \mapsto \lambda y$, $\lambda = \mu - ky$

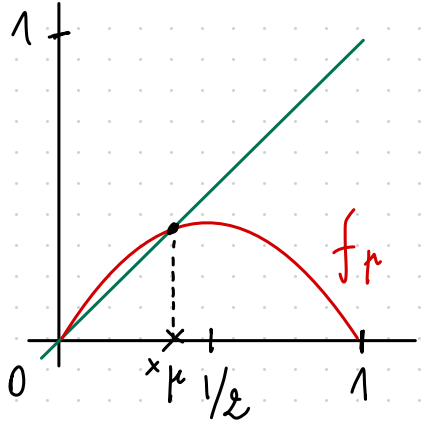
En posant $x = \frac{k}{\mu} y$, on a la transformation

$$\underset{\frac{k}{\mu} y}{\overset{\shortparallel}{x}} \longmapsto \frac{k}{\mu}\left(\mu - k \underbrace{\frac{\mu}{k} x}_{y}\right) \underbrace{\frac{\mu}{k} x}_{y} = \mu (1-x) x \Big]$$

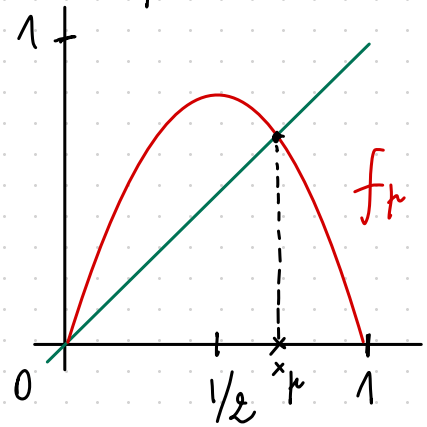
$0 \leq \mu \leq 1$



$1 < \mu \leq 3$



$\mu > 3$

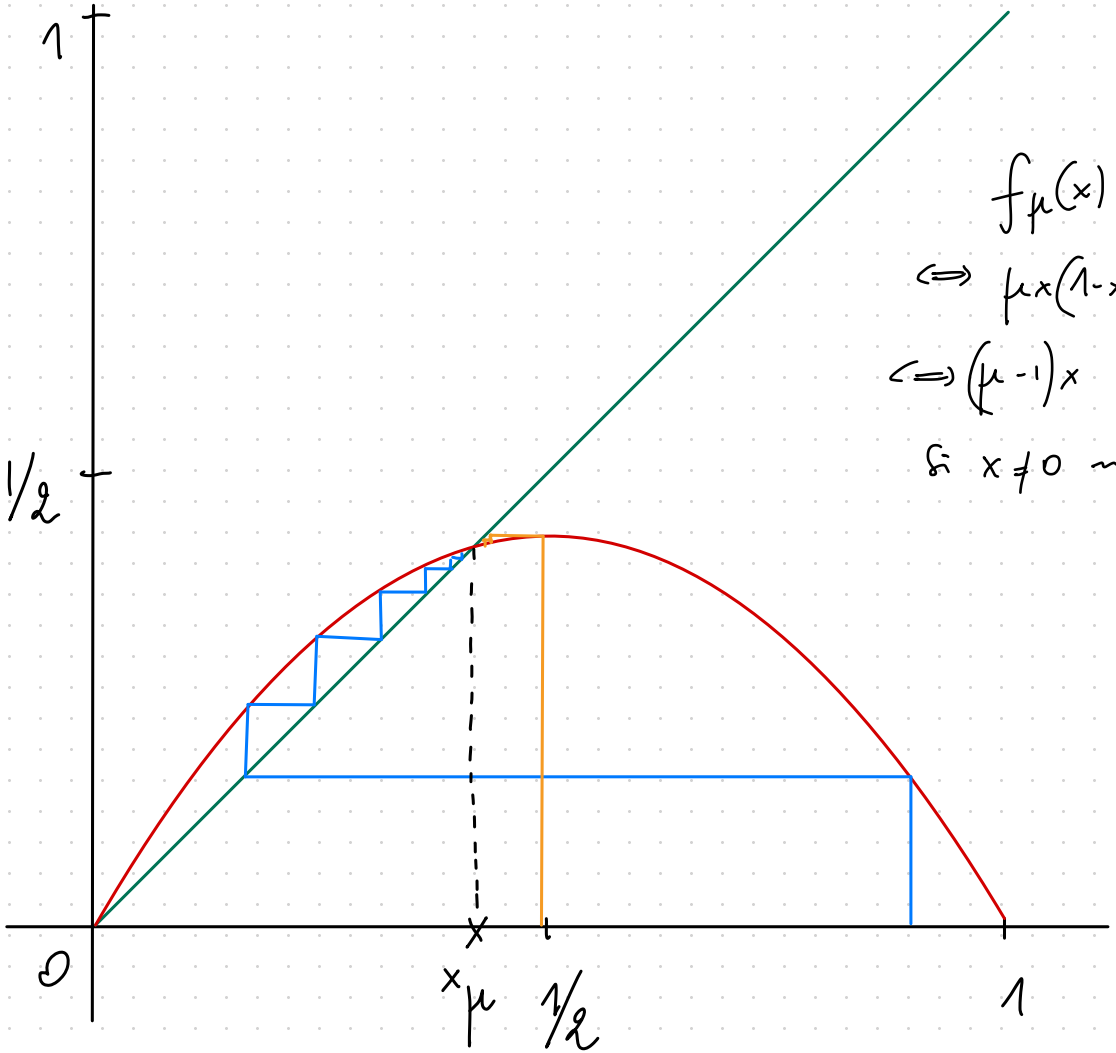


$$\mu x(1-x) = x$$

$$\iff x = 0 \text{ ou } x = x_\mu := \frac{\mu-1}{\mu}$$

$$\left|f_\mu'(x_\mu)\right| > 1$$

$$\left|f_\mu'(x_\mu)\right| = |2-\mu| \in [0,1]$$



$$f_\mu(x) = x$$

$$\iff \mu x(1-x) = x$$

$$\iff (\mu-1)x - \mu x^2 = 0$$

si $x \neq 0 \rightsquigarrow x = \frac{\mu-1}{\mu}$

$0 \leq \mu < 1$. la population s'éteint $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$$x_1 = \underbrace{\mu(1-x_0)}_{\leq \mu} x_0 \leq \mu x_0 \,, \qquad x_2 = \mu(1-x_1)x_1 \leq \mu x_1 \leq \mu^2 x_0 \,..$$

$\rightsquigarrow$ décroissance exponentielle

$1 \leq \mu \leq 2$. points fixes $x = 0$ ou $x = x_\mu = 1 - \frac{1}{\mu} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

$$f_\mu'(x) = \mu(1-x) - \mu x = \mu(1-2x) \Rightarrow f_\mu'(x_\mu) = 2 - \mu \in [0,1]$$

	0		x_μ		$\frac{1}{2}$		1
f'		$+$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$		$\nearrow$	$\frac{\mu}{4}$	$\searrow$	0
$f(x)-x$	0	$+$	0	$-$		$-$	

$I_0 = \left[0, \frac{1}{2}\right]$

$I_1 = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

$\mu \leq 2 \Rightarrow f_\mu(I_0) = \left[0, \frac{\mu}{4}\right] \subset I_0$

et $f_\mu(I_1) = \left[0, \frac{\mu}{4}\right] \subset I_0$

ⓐ Si $x_0 \in [0, x_\mu]$, $x_1 - x_\mu = f_\mu(x_0) - f_\mu(x_\mu) \leq 0$ car $x_0 \leq x_\mu$ et $f_\mu|_{I_0} \nearrow$.

Par récurrence, on a donc $x_n \in [0, x_\mu]$ pour tout $n \geq 0$

De plus $x_{n+1} - x_n = f_\mu(x_n) - x_n \geq 0$

donc $(x_n)_{n \geq 0} \nearrow$ et majorée par x_μ donc CV vers $x_\infty \in I_0$

Mais f_μ C^0 $\Rightarrow$ $f_\mu(x_\infty) = \lim_n f_\mu(x_n) = \lim_n x_{n+1} = x_\infty$

donc x_∞ est un point fixe de I_0. $\lim_n x_n = x_\mu$

ⓑ Si $x_0 \in [x_\mu, \frac{1}{2}]$, $x_1 - x_\mu = f_\mu(x_0) - f_\mu(x_\mu) \geq 0$ car $x_\mu \leq x_0 \leq \frac{1}{2}$

et $f|_{I_0} \nearrow$.

Par récurrence on a donc $x_n \in \left[x_\mu, \frac{1}{2}\right]$ pour tout $n \geq 0$

De plus, $x_{n+1} - x_n = f_\mu(x_n) - x_n \leq 0$

donc $(x_n)_{n \geq 0} \searrow$ et minorée par x_μ donc CV De même la limite est un point fixe ~~ms~~ $\lim_n x_n = x_\mu$

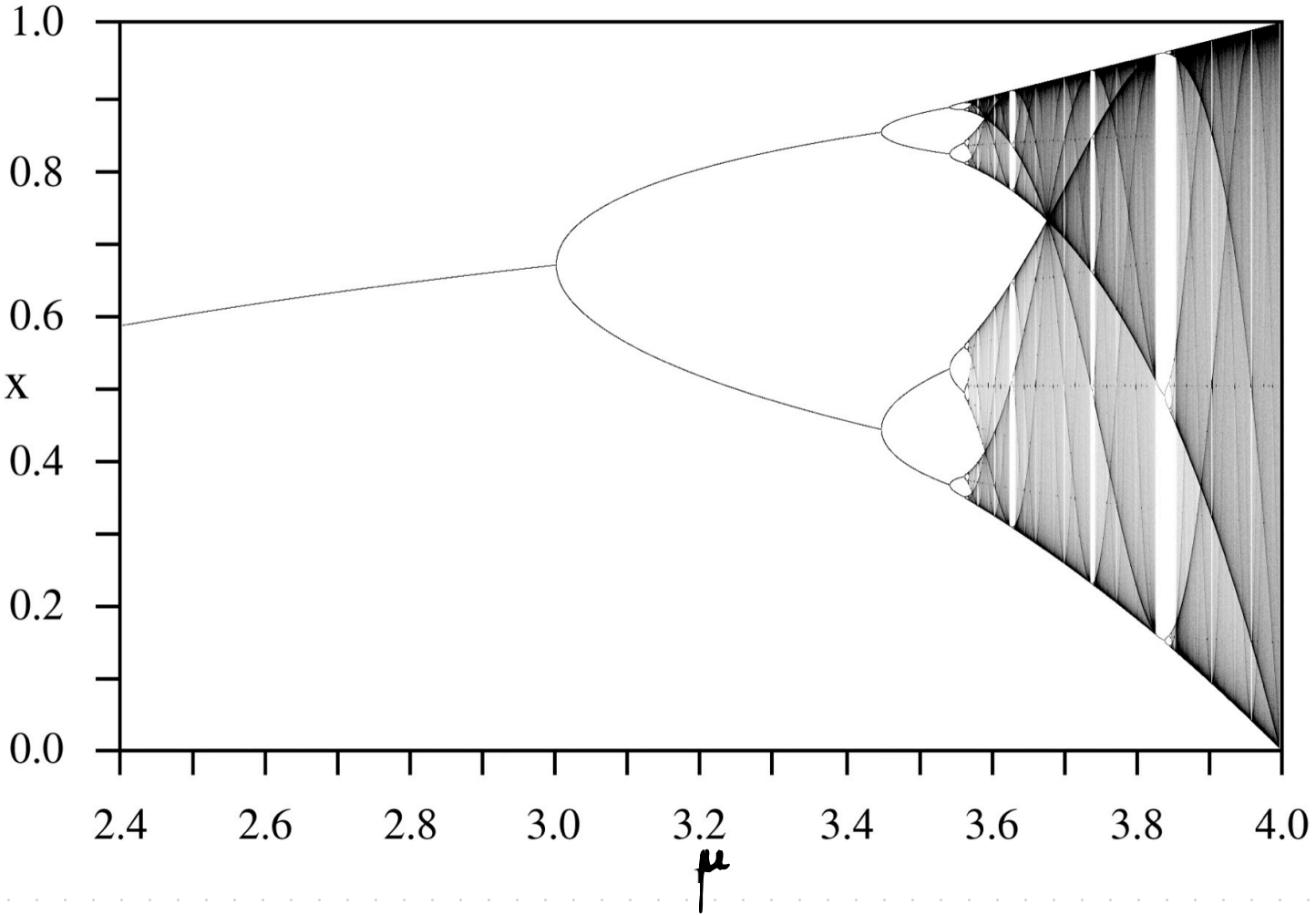
(c) Si $x_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $x_1 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ donc $x_n \xrightarrow[n]{} x_\mu$ aussi.

Si $\mu \in [2, 3]$, $(x_n)_n$ CV également vers $x_\mu = \frac{\mu - 1}{\mu}$

Si $\mu \in]3, \approx 3{,}57]$, l'effectif oscille entre $2, 4, 8, 2^4$ .. valeurs (puissances de 2)

$\left(x_\mu = \frac{\mu-1}{\mu} \text{ devient répulsif. } |f'_\mu(x_\mu)| > 1\right)$

Si $\mu \geq 3{,}57$, l'effectif de la population devient chaotique


1.0
0.8
0.6
x
0.4
0.2
0.0
2.4
2.6
2.8
3.0
3.2
3.4
3.6
3.8
4.0
μ

② rotations du cercle

$$\mathbb{S}^1 = \{ z \in \mathbb{C} \quad |z| = 1 \} = \{ e^{2\pi i \theta}, \ \theta \in \mathbb{R} \}$$

Soit $\tilde{\phi} : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $\theta \mapsto e^{2\pi i \theta}$ $\rightsquigarrow$ $\tilde{\phi}$ est un morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathbb{S}^1, \times)$

$$\left(\tilde{\phi}(\theta_1 + \theta_2) = \tilde{\phi}(\theta_1)\tilde{\phi}(\theta_2) \right) \qquad \tilde{\phi}(0) = 1$$

$$\tilde{\phi}(\theta_1) = \tilde{\phi}(\theta_2) \iff \theta_2 - \theta_1 \in \mathbb{Z}$$

donc $\tilde{\phi}$ induit un isomorphisme ϕ de $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{S}^1$

Étant donné $\alpha \in \mathbb{R}$, la rotation $\tilde{r}_\alpha$ sur $\mathbb{S}^1$ est $\underset{e^{2\pi i \theta}}{\underset{\shortparallel}{z}} \mapsto \underbrace{e^{2\pi i \alpha} z}_{e^{2\pi i (\theta + \alpha)}}$

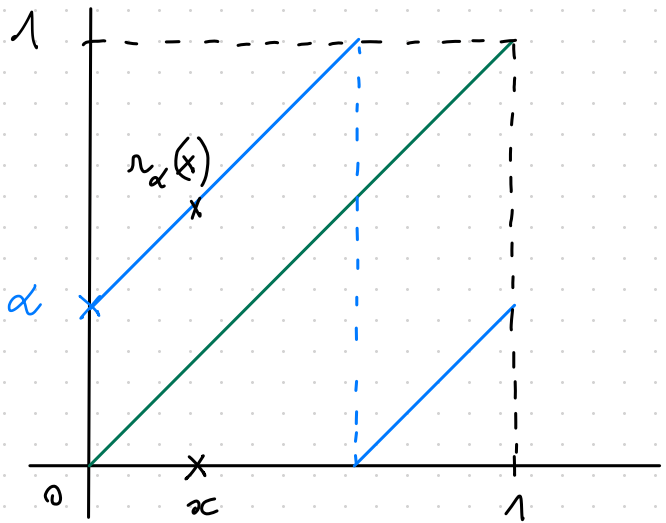
$\rightsquigarrow$ en utilisant ϕ on peut voir cette rotation sur $\mathbb{T}^1$.

$$r_\alpha := \phi^{-1} \circ \tilde{r}_\alpha \circ \phi \quad : \quad \underset{\mathbb{T}^1}{\underset{\cap}{x}} \longmapsto x + \alpha \mod 1$$

r_α est un homéomorphisme de $\mathbb{T}^1$. (C^0, inversible, d'inverse C^0)

l'inverse de r_α est $r_{-\alpha}$. $\quad r_\alpha \circ r_{-\alpha} = r_{-\alpha} \circ r_\alpha = id$

De plus, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\quad r_\alpha^n = r_{n\alpha} \quad x \longmapsto x + n\alpha \mod 1$



Déf Soit $f : X \to X$ un système dynamique discret

On dit qu'un point $x \in X$ est **q-périodique**, $q \in \mathbb{N}^*$, si $f^q(x) = x$

On dit qu'un point $x \in X$ est **périodique** si $f^q(x) = x$ pour un $q \geq 1$

Dans ce cas, la **période** de x est le plus petit entier $q \geq 1$ tq.

$$f^q(x) = x$$

Prop. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

1. si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, r_α n'a pas de point périodique
2. si $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $q \geq 1$, $p \wedge q = 1$, alors tous les points $x \in \mathbb{T}^1$ sont périodiques, de période q

dém : $r_\alpha^q(x) = r_{q\alpha}(x) = x + q\alpha \mod 1$

donc $r_\alpha^q(x) = x \iff q\alpha = 0 \mod 1 \iff q\alpha = p \in \mathbb{Z}$ $(\Rightarrow \alpha \in \mathbb{Q})$

et alors $r_\alpha = r_{\frac{p}{q}}$

De plus $r_\alpha^q = r_{q\alpha} = id$ donc tous les points sont q-périodiques ■

3 Applications dilatantes du cercle

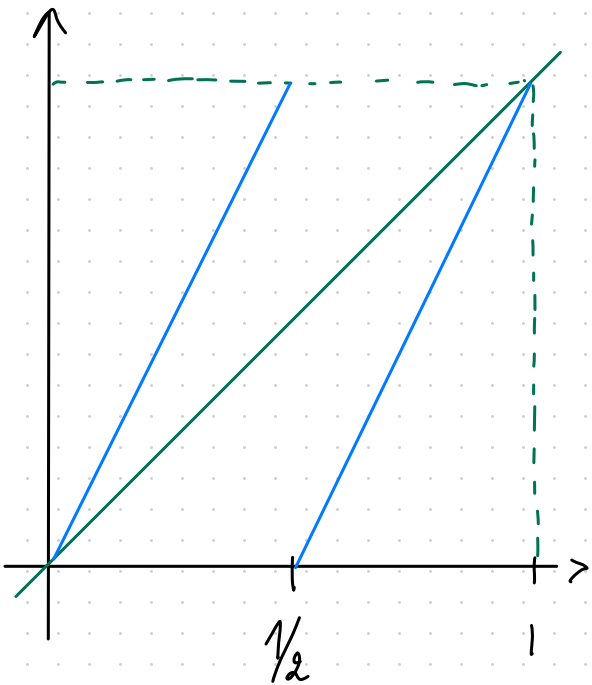
Soit $m \geq 1$ entier. On définit $\tilde{E}_m : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

$x \longmapsto mx \mod 1$

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \tilde{E}_m(x+k) = mx + \underbrace{mk}_{\in \mathbb{Z}} \mod 1 = \tilde{E}_m(x)$

donc $\tilde{E}_m$ induit une application $E_m : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ sur le cercle $\mathbb{T}^1 (\sim S^1)$.

Par exemple, pour $m = 2$, $E_2 : x \longmapsto \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ 2x-1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1[\end{cases}$



On a $E_m^q(x) = m^q x \mod 1$, $\forall x \in \mathbb{T}^1$

donc x est q-périodique <u>ssi</u>

$$m^q x - x = (m^q - 1)\, x = 0 \mod 1$$

i.e. $x = \dfrac{p}{m^q - 1}$, $p = 1, 2, \dots, m^q - 1$

$x = E_m^{\tau(x)}(x)$ car $\tau(x)$ est la période de x

$$\left(E_m^{\tau(x)}\right)^2(x) = E_m^{\tau(x)} \circ E_m^{\tau(x)}(x) = E_m^{\tau(x)}\Big(\underbrace{E_m^{\tau(x)}(x)}_{x}\Big) = E_m^{\tau(x)}(x) = x \quad \text{etc.}$$

(⚠ q n'est pas forcément la période de x)

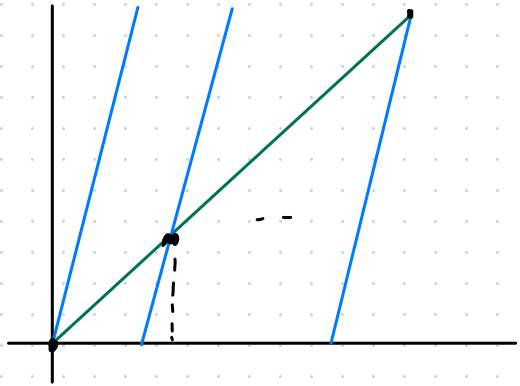
Si x est q-périodique, alors sa période $\tau(x)$ divise q

En effet on fait la division euclidienne. $q = \tau(x)k + r$, $0 \le r \le \tau(x) - 1$

$$E_m^r(x) = E_m^r\Big(\big(\underbrace{E_m^{\tau(x)}}_{x}\big)^k(x)\Big) = E_m^{\tau(x)k + r}(x) = E_m^q(x) = x$$

donc $r = 0$ (sinon $r \leq \tau(x) - 1$ et $E_m^r(x)$ absurde)

En particulier, si q est premier et x est q-périodique, alors la période de x est 1 ou q (les diviseurs de q)



il y a $m-1$ points fixes pour E_m (points pér de période 1)

$\rightsquigarrow$ Si q est premier, le nombre de points périodiques de période q est

$$n_m(q) = m^q - m \qquad \left(m^q - 1 - (m-1)\right)$$

Temps discret, temps continu

Il y a différentes manières de passer d'un système dynamique en temps continu à un système dynamique en temps discret

① Soit $(\Phi^t)_{t\in\mathbb{R}}$ un flot C^1 sur un espace X

Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, on peut considérer l'application Φ^{t_0} = temps $-t_0$ de Φ

$\rightsquigarrow f_0 = \Phi^{t_0}$ est un difféomorphisme de X, d'inverse Φ^{-t_0}

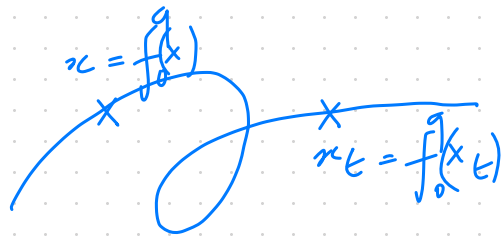
Mais très peu de difféos peuvent être obtenus de cette manière :

si $x \in X$ est q-périodique pour f_0, i.e., $f_0^q(x) = x$, avec $f_0(x) \neq x$, $q > 1$

alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $x_t = \Phi^t(x)$ l'est aussi, car

$$f_0^q(x_t) = \Phi^{qt_0} \circ \Phi^t(x) = \Phi^{t+qt_0}(x) = \Phi^t\big(\underbrace{f_0^q(x)}_{x}\big) = x_t$$

$$\left(\Phi^{t_0}\right)^q = \Phi^{qt_0}$$



En particulier, si f a un point périodique isolé (courant) ($\exists\, U \ni x$ voisinage de x t.q. x est le seul point q-périodique de f dans U)

alors f ne peut pas être réalisé comme temps $-t_0$ d'un flot

② Application de Poincaré : continu ⇝ discret

Soit $(\Phi^t)_{t\geq 0}$ un semi-flot sur un espace Y

Déf : un sous-ensemble $X \subset Y$ est appelé section de Poincaré pour $(\Phi^t)_t$

si $\forall x \in X$, $\tau_X(x) = \inf\{t > 0 \,.\, \Phi^t(x) \in X\} < +\infty$

(convention : $\inf \emptyset = +\infty$)

La fonction $\tau_X : X \to \mathbb{R}_+$ est appelée temps de premier retour,

et l'application $F : X \to X$, $x \mapsto \Phi^{\tau_X(x)}(x)$ est appelée application de Poincaré ou application de premier retour

Exemple : soit $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs C^1 sur $\mathbb{R}^2$,

et $(\Phi^t)_{t\in\mathbb{R}}$ le flot associé

(flot de l'EDO $\frac{dx}{dt} = V(x)$)

Si $x \in \mathbb{R}^2$ satisfait $V(x) \neq 0$,

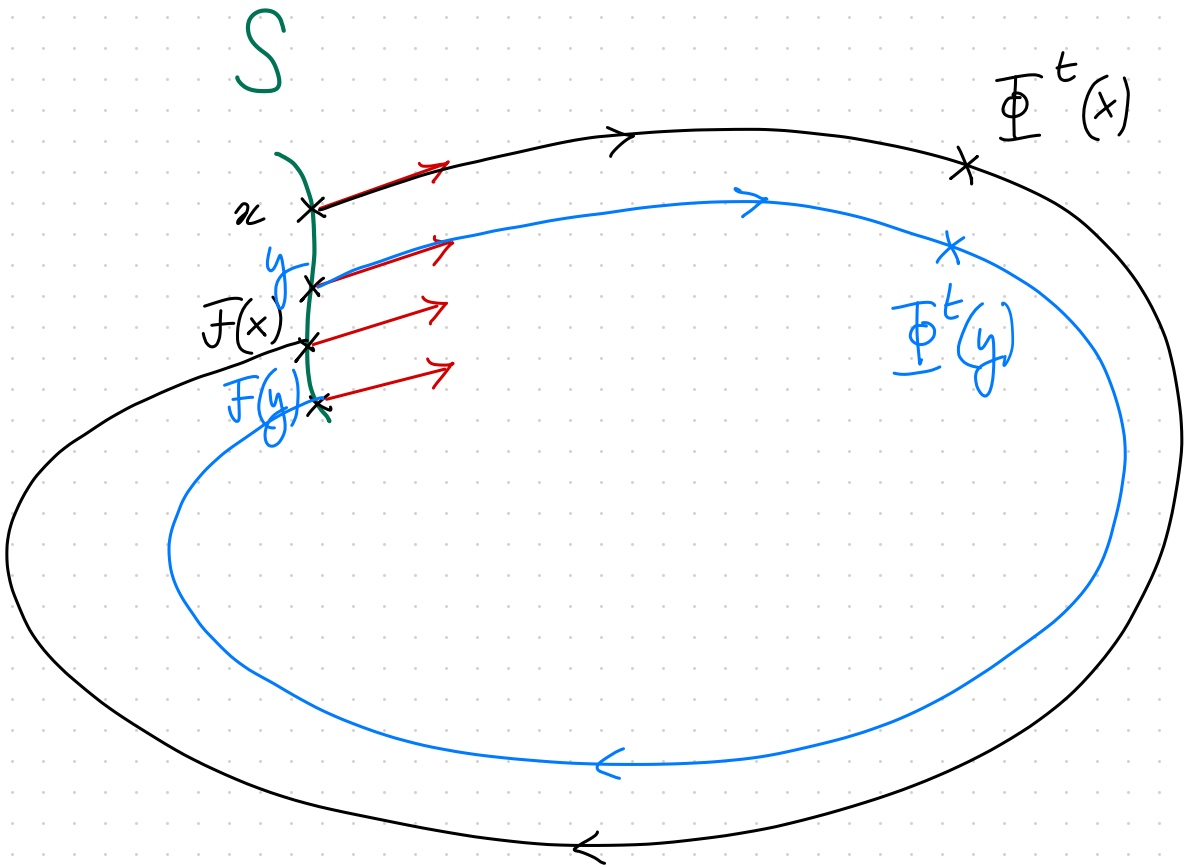
et $\exists S$ sous-var de dimension 1 (~ segment) contenant x

tq $V(y) \neq 0$, $\forall y \in S$, et $\exists \tau > 0$ tq $\Phi^\tau(x) \in S$,

alors $\exists U \subset S$ voisinage de x dans S t.q $\forall y \in U$, $\tau_S(y) < +\infty$,

et l'application de Poincaré $F : U \to S$ est bien définie

$$y \mapsto \Phi^{\tau_S(y)}(y)$$


S
$\Phi^t(x)$
x
y
$F(x)$
$F(y)$
$\Phi^t(y)$

③ Flot de suspension . système dyn. discret $\longrightarrow$ continu

Soit $f : X \longrightarrow X$ système dyn à temps discret

On se donne une fonction $\tau : X \to \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$,

et on définit l'ensemble $Y = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} \,.\, 0 \leq t \leq \tau(x)\}/\sim$

où $(x, \tau(x)) \sim (f(x), 0)$ pour tout x

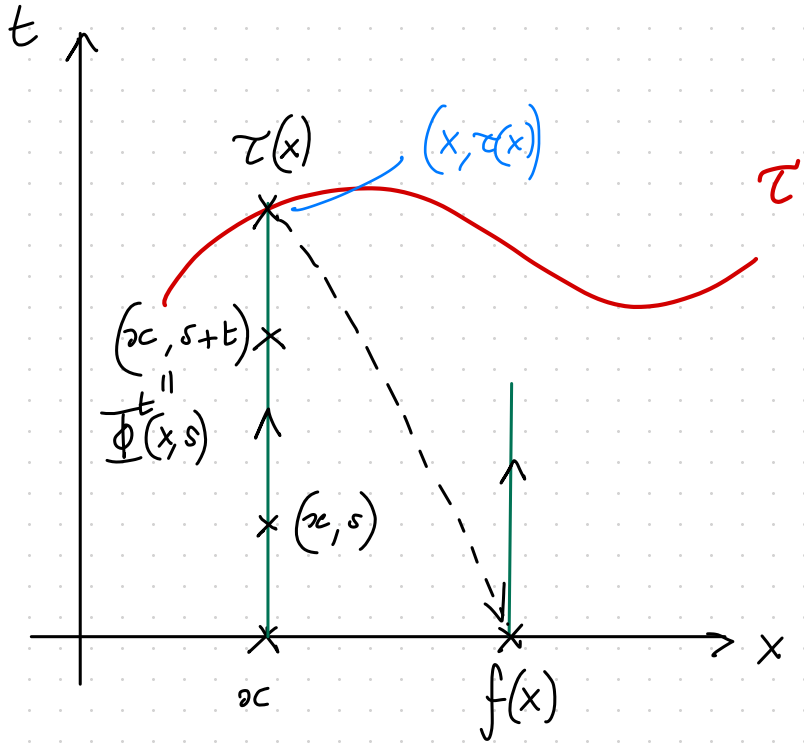
Déf. (semi-flot de suspension)

Le semi-flot de suspension $(\Phi^t)_{t \geq 0}$ au-dessus de f associé à la fonction tout τ est défini par.

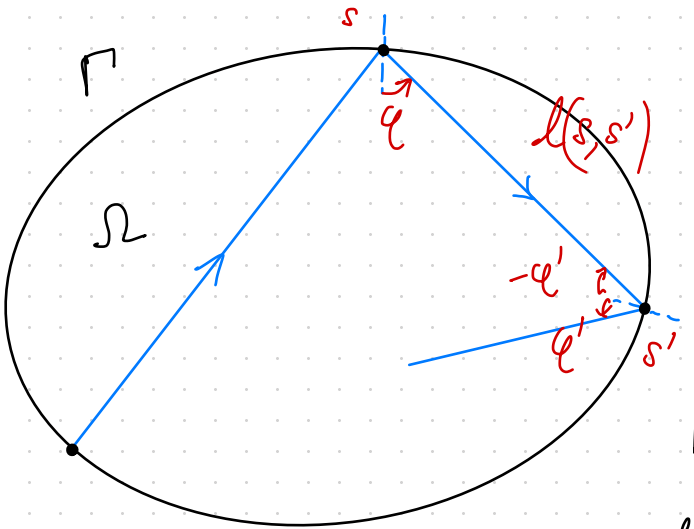
$$\Phi^t(x,s) = (x, s+t) \quad \text{si} \quad s+t \leq \tau(x)$$

Si f est inversible, on obtient un flot (de suspension)

On remarque que f est l'application de Poincaré de $(\Phi^t)_t$ associée à la section $S := X \times \{0\}$.



Exemple : les billards



$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ domaine du plan

bordé par une courbe Γ de classe C^3, convexe.

On paramètre Γ par longueur d'arc :

$$\Gamma = \{\gamma(s),\ s \in [0,\ell[\}.$$

Étant donné $s \in [0,\ell]$ on lance une

boule en partant de $\gamma(s) \in \Gamma$

en faisant un angle φ avec la normale à Γ en $\gamma(s)$.

$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

puis elle continue en ligne droite jusqu'à rencontrer à nouveau le bord Γ

On note s' le nouveau paramètre associé à la collision, et $-\varphi'$ l'angle d'incidence avec la normale.

$s' \in [0,\ell[$

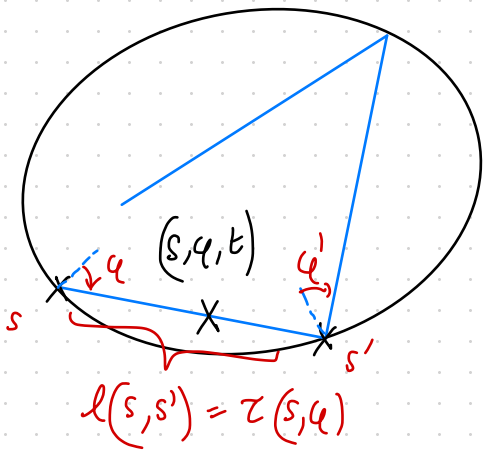
⇝ on définit l'application billard comme le système dynamique discret

$$\mathcal{F} : (s,\varphi) \longmapsto (s',\varphi')$$

On peut aussi considérer le flot billard $\Phi = (\Phi^t)_{t\in\mathbb{R}}$:

c'est le flot de suspension au-dessus de $\mathcal{F}$ pour la fonction toit τ

où $\tau(s,\varphi) := \ell(s,s')$ = longueur du segment connectant (s,φ) à (s',φ') sur Ω



ici t = distance à la dernière collision dans le passé

Quelques définitions

Soit $f : X \to X$ un système dynamique (discret) sur un ensemble X.

L'orbite positive d'un point $x \in X$ est l'ensemble $\mathcal{O}^+(x) = \{ f^n(x) : n \in \mathbb{N} \}$.

Si f est inversible, on note $\mathcal{O}(x) = \{ f^n(x) : n \in \mathbb{Z} \}$ l'orbite de x

(et $\mathcal{O}^-(x) = \{ f^{-n}(x) : n \in \mathbb{N} \}$ l'orbite négative de x)

On suppose que f préserve une certaine structure de X :

- système dynamique topologique : si X est un espace topologique et f une application continue / un homéo.
- système dynamique différentiable : si X est une variété et f est C^k, $k \geq 1$ / un difféomorphisme

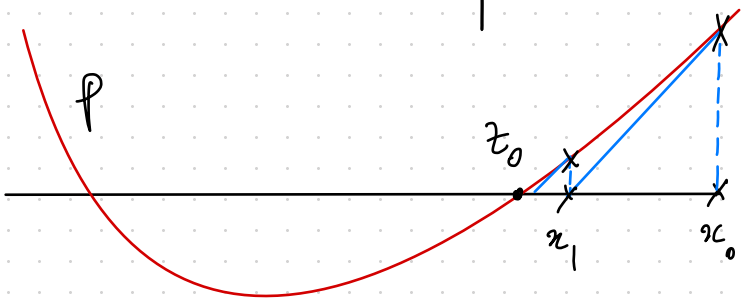
- **système dynamique mesuré** : si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré et f préserve la mesure μ (souvent $\mathcal{A}$ = tribu des boréliens)

  ~~> $f_* \mu = \mu$, i.e., $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$, $\forall A \in \mathcal{A}$

  (~~> théorie ergodique)

- **dynamique holomorphe** : $X = \mathbb{C}$ et f = polynôme complexe ou fraction rationnelle

ex. : méthode de Newton pour trouver les zéros d'un polynôme P



x_0 proche de z_0 racine de P :

$$P(x) \simeq \underbrace{P(x_0) + P'(x_0)(x - x_0)}_{\tilde{P}_0(x)}$$

$P(z_0) = 0$: on résout de manière approchée

$\rightsquigarrow$ on cherche x_1 t.q. $\tilde{P}_0(x_1) = 0$, i.e., $x_1 = x_0 - \dfrac{P(x_0)}{P'(x_0)}$

$\rightsquigarrow$ on continue de manière itérative :

$$x_{n+1} = \underbrace{x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)}}_{f(x_n)}, \quad n \geq 0$$

Si le zéro z_0 est isolé alors il existe un voisinage U de z_0 t.q. $\forall x \in U$, la suite $(f^n(x))_{n \geq 0}$ va converger vers z_0,

et si $P'(z_0) \neq 0$, la CV est au moins quadratique.
(nombre de chiffres corrects double à chaque étape)

Prop. Soit $f : X \to X$ syst. dyn., et $x \in X$ de période $q \geq 1$. Alors

(1) $x, f(x), \dots, f^{q-1}(x)$ sont deux à deux distincts

(2) $\forall p \geq 0$, $f^p(x) = f^r(x)$ où r = reste de la div. de p par q

dém. : (2) $p = bq + r$, $0 \leq r \leq q-1$.

$$f^p(x) = f^{bq+r}(x) = f^r\Big(\underbrace{f^{bq}}_{\underbrace{f^q \circ \dots \circ f^q}_{b \text{ fois}}}(x)\Big) = f^r(x)$$

$$f^q \circ \dots \circ f^q(x) = x$$

Si $i \geq 0$, $f^q(f^i(x)) = f^{q+i}(x) = f^i(\underbrace{f^q(x)}_{x}) = f^i(x)$

donc $f^i(x)$ est aussi périodique, de période $q' \leq q$.

D'autre part, pour $i \in \{0, \dots, q-1\}$,

$$x = f^q(x) = f^{q-i}(\underbrace{f^i(x)}_{\text{de pér. } q'}) \quad \text{donc} \quad q \leq q', \text{ et donc } q = q'.$$

Preuve de (1) : si $0 \leq i < j \leq q-1$, avec $f^i(x) = f^j(x)$,

alors $f^j(x) = f^{j-i}(f^i(x)) = f^i(x)$ donc la période de $f^i(x)$

est au plus $j-i < q$, ce qui contredit le fait mis ci-dessus (la pér. de $f^i(x)$ est q).

$\blacksquare$

Ensembles invariants

Déf. : Soit $f : X \to X$ un syst. dyn. Un ensemble $A \subset X$ est dit :

1) f-invariant si $f^{-1}(A) = A$, où
$$f^{-1}(A) = \{ x \in X : f(x) \in A \};$$

2) positivement invariant par f si $f(A) \subset A$;

3) négativement invariant par f si $f^{-1}(A) \subset A$.